الفصل الرابع

٤-٣ دوال ومتباينات الجذر التربيعي

Square Root Functions and Inequalities



فيما سبق

درست تبسيط عبارات تحتوي جذورًا تربيعية. (مهارة سابقة)

والآن

- أمثل بيانيًا دوال الجذور التربيعية وأحللها.
- أمثل بيانيًا متباينات الجذور التربيعية.

المفردات

دالة الجذر التربيعي
square root function

الدالة الجذرية
radical function

متباينة الجذر التربيعي
square root inequality

obeikaneducation.com

لماذا؟

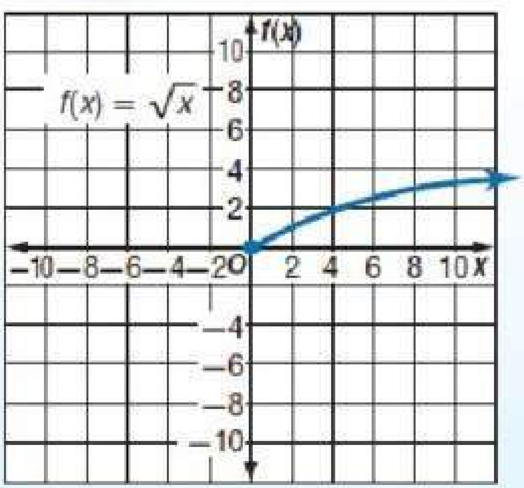
يُمثل الزمن الدوري للبندول بدالة الجذر التربيعي: $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ،
حيث T الزمن الدوري بالثواني، L طول البندول بالأقدام، g تسارع السقوط الحر، الذي يساوي 32 قدمًا لكل ثانية مربعة.

دوال الجذر التربيعي: إذا احتوت دالة على الجذر التربيعي لمتغير، تسمى **دالة الجذر التربيعي**. وهي نوع من أنواع **الدالة الجذرية**.

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الجذر التربيعي



الدالة الرئيسة (الأم): $f(x)=\sqrt{x}$

المجال: $\{x \mid x \geq 0\}$

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

المقطعان: $x = 0, f(x) = 0$

غير معرّفة عندما: $x < 0$

سلوك الدالة عند طرفيها: $x \to 0, f(x) \to 0$

$x \to +\infty, f(x) \to +\infty$



الفصل الرابع
٤-٣ دوال ومتباينات الجذر التربيعى
Square Root Functions and Inequalities

مجال دالة الجذر التربيعي محدد بالقيم التي تكون عندها الدالة معرّفة .

مثال 1 تعيين المجال والمدى

عين كلًّا من المجال والمدى للدالة: $f(x) = \sqrt{x+4}$.

مجال دالة الجذر التربيعي يشمل فقط قيمًا يكون ما تحت الجذر عندها غير سالب.

$x + 4 \geq 0$ اكتب المتباينة

$x \geq -4$ اطرح 4 من الطرفين

وبالتالي فالمجال هو: $\{x \mid x \geq -4\}$.

وبما أن $\sqrt{x+4} \geq 0$ دائمًا، وتزيد قيم الدالة بتزايد قيم x، فإن أقل قيمة للدالة تكون عندما $x + 4 = 0$؛ أي عندما $x = -4$؛ لذا فإن $f(-4)$ تمثل الحد الأدنى للمدى.

$(f(-4) = \sqrt{-4+4} = 0)$

لذلك، فالمدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$.

تحقق من فهمك :-

1) عين المجال والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

(1B $f(x) = \sqrt{x+6} + 2$

المجال $\{x \mid x \geq -6\}$

المدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 2\}$

(1A $f(x) = \sqrt{x-3}$

المجال $\{x \mid x \geq 3\}$

المدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

٣-٤ دوال ومتباينات الجذر التربيعى

Square Root Functions and Inequalities

يمكنك تمثيل دالة الجذر التربيعى بيانيًّا، بتحديد القيم الصغرى لها، وعمل جدول لبعض قيم x وقيم $f(x)$ المقابلة لها.

مثال 2 تمثيل دوال الجذر التربيعي بيانيًّا

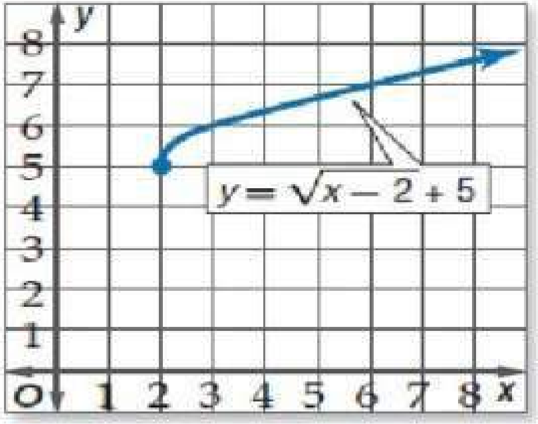
مثّل كلَّ دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها:

a) $y = \sqrt{x-2} + 5$

القيمة الصغرى للدالة عند $(2, 5)$. اعمل جدولًا من قيم x ، حيث $x \geq 2$، ومثّل الدالة بيانيًّا. لاحظ سلوك الدالة عند الأطراف، فكلما زادت x، زادت y.

المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$ ، والمدى هو $\{y \mid y \geq 5\}$.

x	y
2	5
3	6
4	6.4
5	6.7
6	7
7	7.2
8	7.4



إرشادات للدراسة

المجال والمدى

حدود المجال والمدى تمثل إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي.

إرشادات للدراسة

المجال والمدى

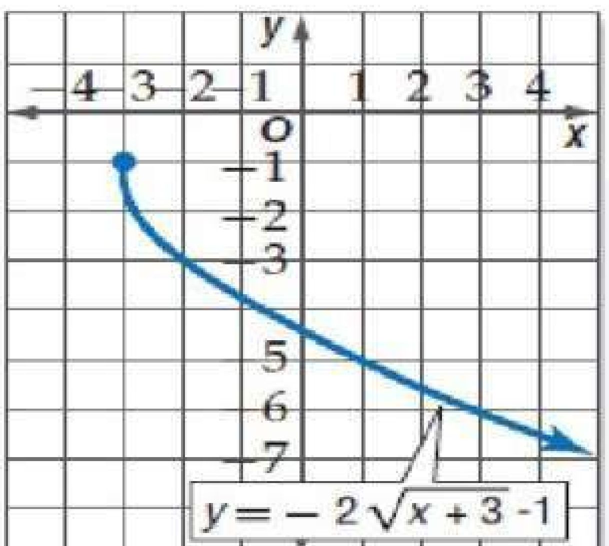
حدود المجال والمدى تمثل إحداثيات نقطة بدء منحنى دالة الجذر التربيعي.

$y = -2\sqrt{x+3} - 1$ (b

القيمة الصغرى لمجال الدالة هي -3. اعمل جدولًا من قيم x، حيث $x \geq -3$، ومثّل الدالة بيانيًا.

المجال هو $\{x \mid x \geq -3\}$، المدى هو $\{y \mid y \leq -1\}$.

x	y
-3	-1
-2	-3
-1	-3.8
0	-4.5
1	-5
2	-5.5
3	-5.9

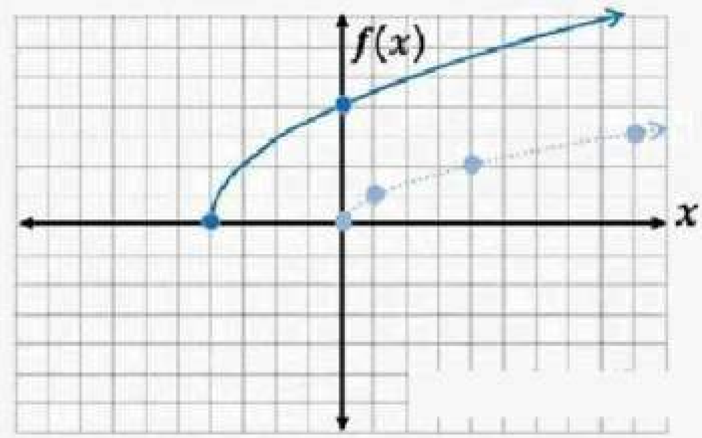


الفصل الرابع
٤-٣ دوال ومتباينات الجذر التربيعي
Square Root Functions and Inequalities

تحقق من فهمك :-

2) مثل بيانياً كل دالة مما يلي، وحدد مجالها ومداها:

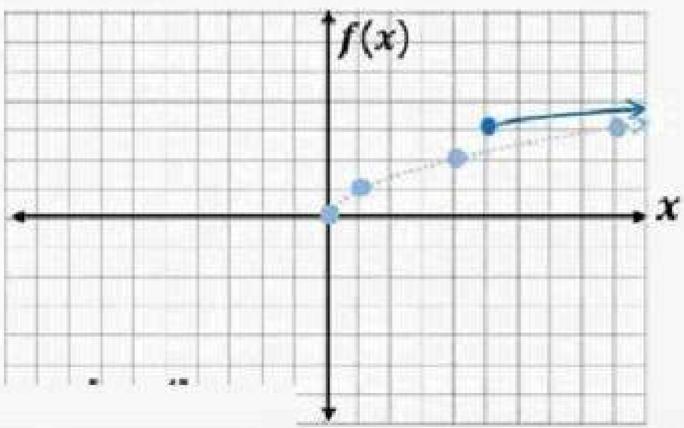
2A) $f(x) = 2\sqrt{x+4}$



المجال $\{x \mid x \geq -4\}$

المدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

2B) $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x-5} + 3$



المجال $\{x \mid x \geq 5\}$

المدى هو $\{f(x) \mid f(x) \geq 3\}$

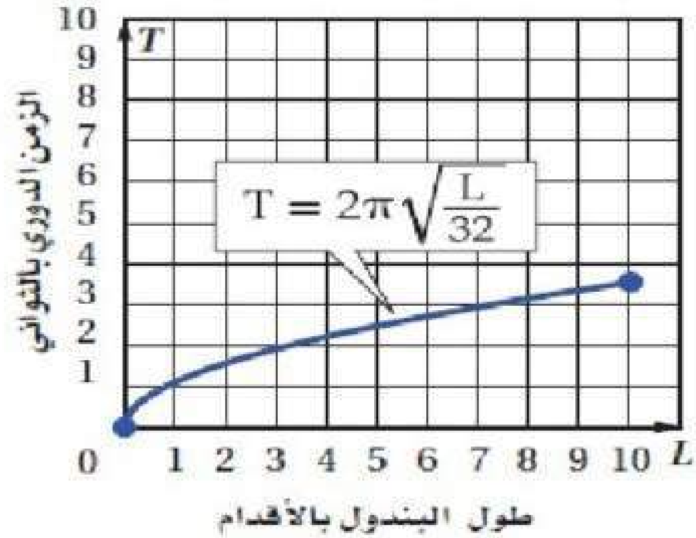
٤-٣ دوال ومتباينات الجذر التربيعى

Square Root Functions and Inequalities

مثال 3 من واقع الحياة استعمال التمثيل البياني لتحليل دوال الجذر التربيعي

فيزياء: بالرجوع إلى فقرة لماذا؟ بداية هذا الدرس، يمكنك تحديد الزمن الدوري للبندول T بالثواني باستعمال الدالة $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ حيث تمثل L طول البندول بالأقدام.

a) مثّل هذه الدالة بيانيًا في الفترة $0 \le L \le 10$.



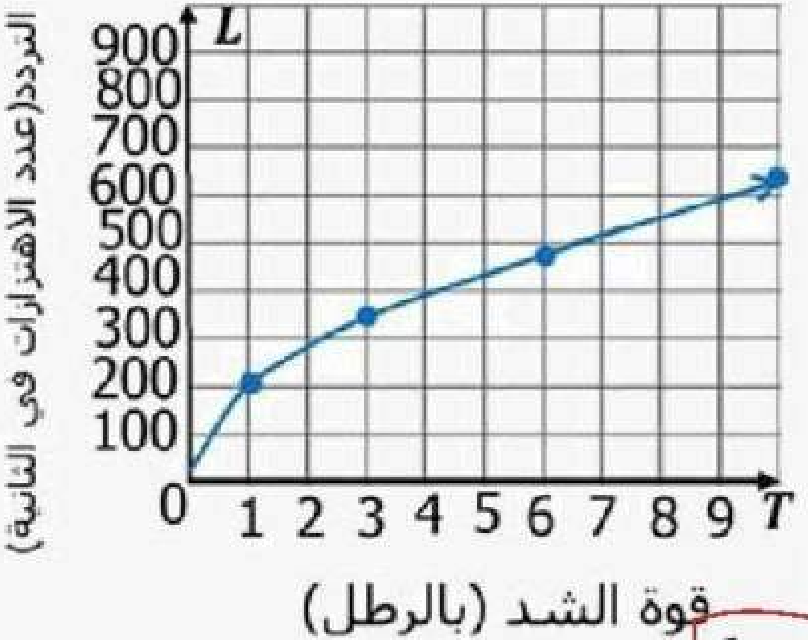
L	T
0	0
1	1.11
4	2.22
6	2.72
8	3.14
10	3.51

b) ما الزمن الدوري إذا كان طول البندول 8 أقدام؟

بناءً على التمثيل البياني والجدول فإن الزمن الدوري يكون 3.14 ثوانٍ تقريبًا.

تحقق من فهمك :-

3) الصوت: يمكن تحديد تردد اهتزازات وتر مشدود باستعمال الدالة: $F = 200\sqrt{T}$ ، حيث F تمثل عدد الاهتزازات في الثانية، T كتلة ثقل قوة الشد مقيسة بالرطل. مثل هذه الدالة بيانياً في الفترة $0 \le T \le 10$، ثم أوجد التردد عندما تكون قوة الشد 3 أرطال.



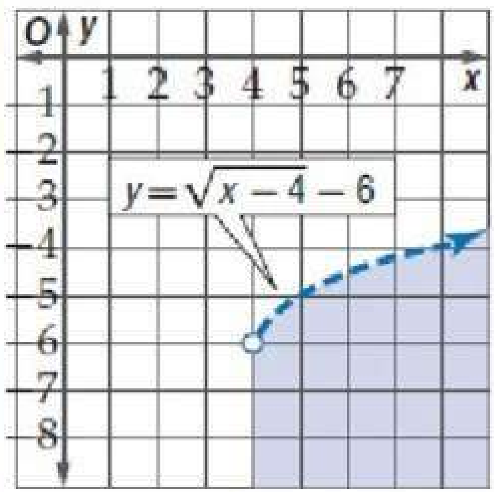
T	L
0	0
1	200
3	346.4
6	489.9
8	555.2
10	632.5

التردد يساوي 346.4 تقريباً

الفصل الـرابـــع
٣-٤ دوال ومتباينات الجذر التربيعى
Square Root Functions and Inequalities

متباينات الجذر التربيعي: متباينة الجذر التربيعي هي متباينة تحتوي الجذر التربيعي. ويمكن تمثيلها بيانيًا تمامًا مثل طريقة تمثيل المتباينات الأخرى.

مثال 4 تمثيل متباينة الجذر التربيعي بيانيًا



مثّل المتباينة $y < \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.

مثّل الحد $y = \sqrt{x-4} - 6$ بيانيًّا.

المجال هو $\{x \mid x \geq 4\}$. وبما أن المتباينة تحوي« y أقل من »، فإن التمثيل البياني للمتباينة هو المنطقة المظللة تحت الحد، وضمن المجال.

تحقق: اختر نقطة في المنطقة المظللة، وتأكد أنها تحقق المتباينة.

اختبر $(7, -5)$:

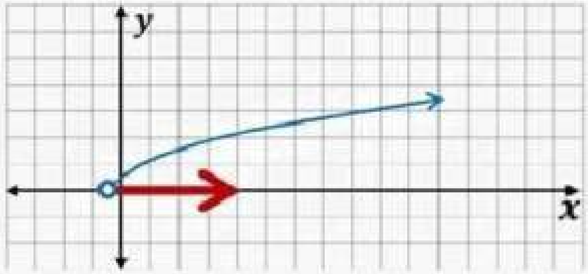
$$-5 \overset{?}{<} \sqrt{7-4} - 6$$

$$-5 \overset{?}{<} \sqrt{3} - 6$$

$$-5 < -4.27 \checkmark$$

تحقق من فهمك :-

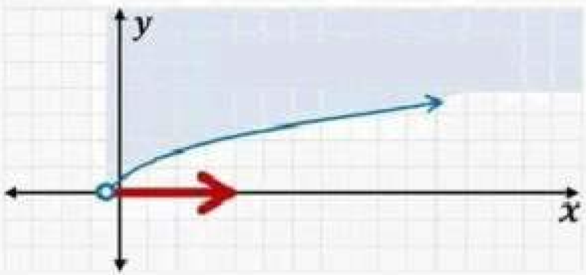
4A) مثل المتباينة $f(x) \geq \sqrt{2x+1}$



1) تحويل المتباينة إلى دالة، $y = \sqrt{2x+1}$

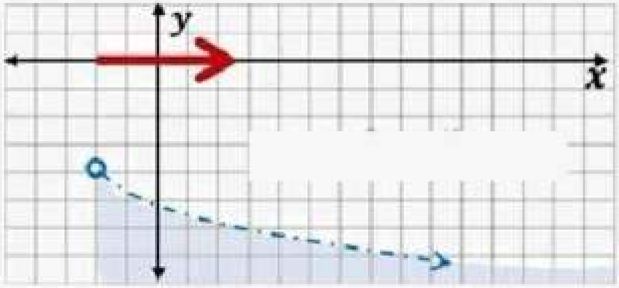
2) نوجد مجال الدالة، $\{x \mid x \geq -\frac{1}{2}\}$

3) مثل دالة الحد بيانياً.



4) إذا كانت قيمة y أقل من الحد فنظلل تحت الحد وإذا كانت قيمة y أكبر من الحد فنظلل فوق الحد.

4B) مثل المتباينة $f(x) < -\sqrt{x+2} - 4$





تـــأكـد :-

مثال 1

عين المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

1) $f(x) = \sqrt{4x}$

المجال = $\{ x \mid x \geq 0 \}$

المدى = $\{ f(x) \mid f(x) \geq 0 \}$

2) $f(x) = \sqrt{x-5}$

المجال = $\{ x \mid x \geq 5 \}$

المدى = $\{ f(x) \mid f(x) \geq 0 \}$

تـــأكـد :–

مثال 1

عين المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

$$f(x) = \sqrt{x+8} - 2 \quad (3$$

المجال = $\{x \mid x \geq -8\}$

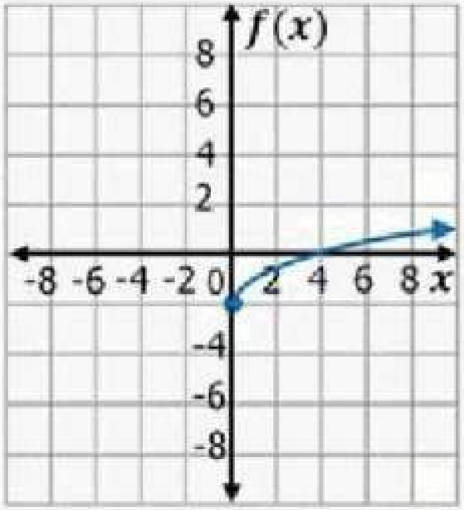
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq -2\}$

تـــأكـد :ـ

مثال 2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

$f(x) = \sqrt{x} - 2$ (4



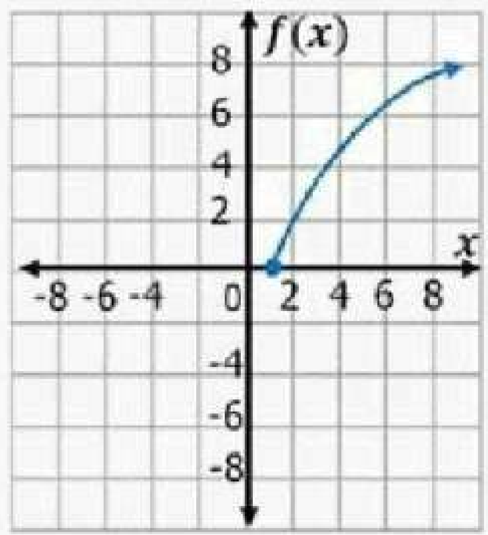
المجال = $\{ x \mid x \geq 0 \}$

المدى = $\{ f(x) \mid f(x) \geq -2 \}$

تـــأكـد :-

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

$f(x) = 3\sqrt{x-1}$ (5



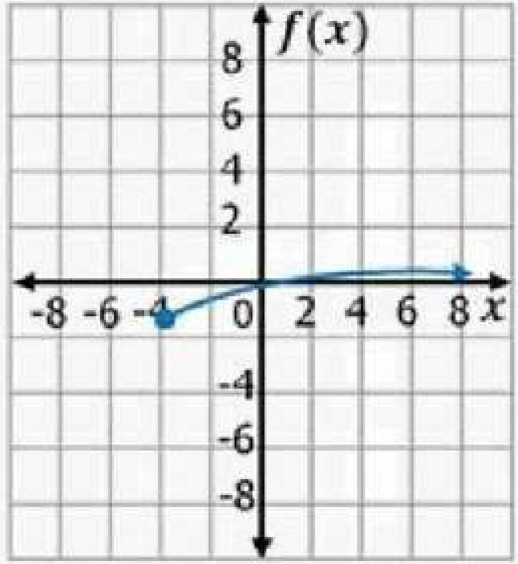
المجال = $\{ x \mid x \geq 1 \}$

المدى = $\{ f(x) \mid f(x) \geq 0 \}$

تــــأكـد :-

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+4} - 1$ (6



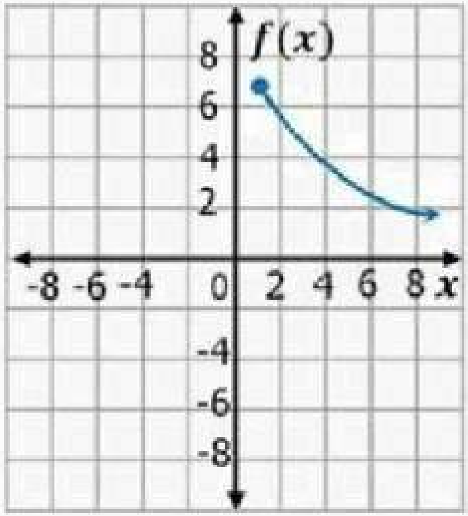
المجال = $\{x \mid x \geq -4\}$

المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq -1\}$

تــــأكـد :ـ

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

$f(x) = -\sqrt{3x-5}+5$ (7



المجال = $\{\, x \mid x \geq \frac{5}{3} \,\}$

المدى = $\{\, f(x) \mid f(x) \leq 5 \}$

تــــأكـد :-

مثال 3

8) محيطات: يمكن تمثيل سرعة موجات تسونامي باستعمال المعادلة : $v = 356\sqrt{d}$ حيث تمثل v السرعة بالكيلومترات لكل ساعة و d متوسط عمق الماء بالكيلومترات. إذا كانت سرعة الموجة $145 km/h$ فما متوسط عمق الماء؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة من الكيلومتر.

$$v = 356\sqrt{d}$$

$$145 = 356\sqrt{d}$$

$$d = \left(\frac{145}{356}\right)^2$$

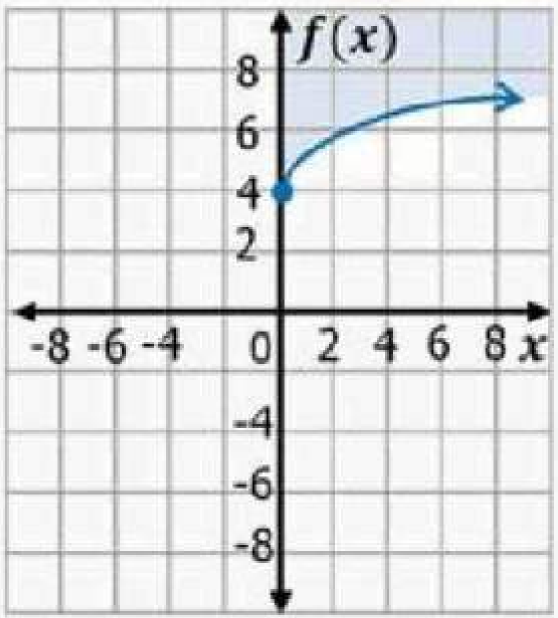
$$\approx 0.17 km$$

تــأكـد :-

مثال 4

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

$f(x) \geq \sqrt{x} + 4$ (9

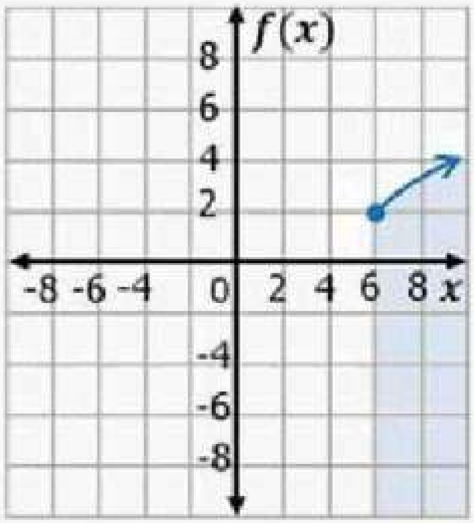


تـــأكـد :-

مثال 4

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

(10 $f(x) \le \sqrt{x-6} + 2$

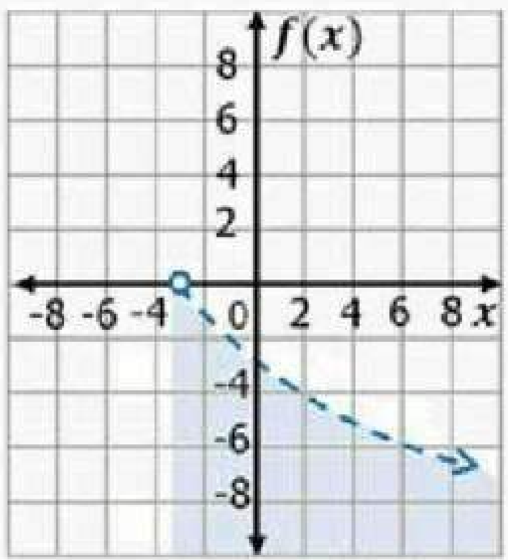


تــــأكـد :-

مثال 4

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

$$f(x) < -2\sqrt{x+3} \quad (11$$

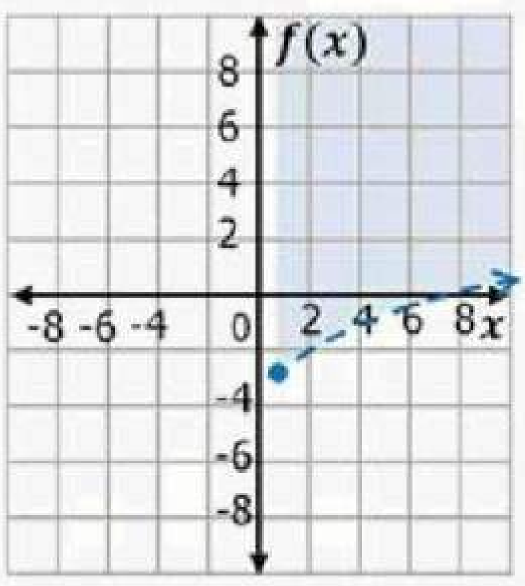


تــــأكـد :–

مثـال 4

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

$f(x) > \sqrt{2x-1} - 3$ (12



تدرب وحل المسائل :ـ

مثال 1

عين المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

$f(x) = -\sqrt{2x} + 2$ (13

المجال = $\{ x \mid x \geq 0\}$

المدى = $\{ f(x) \mid f(x) \leq 2\}$

تـدرب وحل المسائل :-

مثال 1

عين المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

$f(x) = \sqrt{x} - 6$ (14

المجال = $\{ x \mid x \geq 0 \}$

المدى = $\{ f(x) \mid f(x) \geq -6 \}$



تـدرب وحـل المسائل :–

مثال 1

عين المجال والمدى لكل دالة فيما يأتي:

15) $f(x) = 4\sqrt{x-2} - 8$

المجال = $\{x \mid x \geq 2\}$

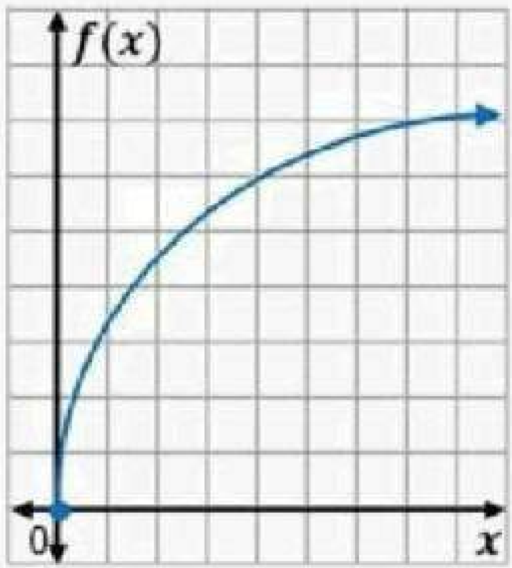
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq -8\}$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

$f(x) = \sqrt{6x}$ (16



المجال = $\{x \mid x \geq 0\}$

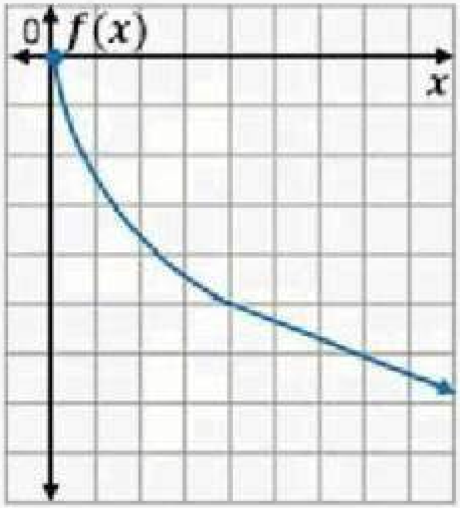
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

$f(x) = -\sqrt{5x}$ (17



المجال = $\{x \mid x \geq 0\}$

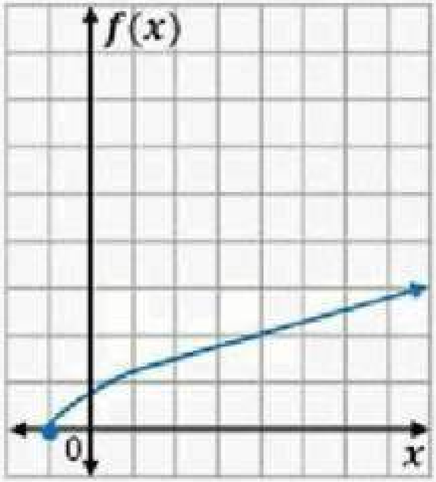
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \leq 0\}$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

(18 $f(x) = \sqrt{x+1}$



المجال = $\{x \mid x \geq -1\}$

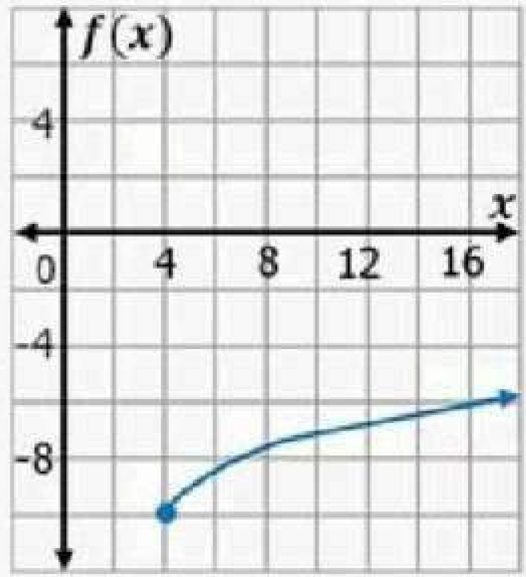
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$

تـدرب وحـل المسائل :–

مثال 2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

$$f(x) = \sqrt{x-4} - 10 \quad (19$$



المجال = $\{x \mid x \geq 4\}$

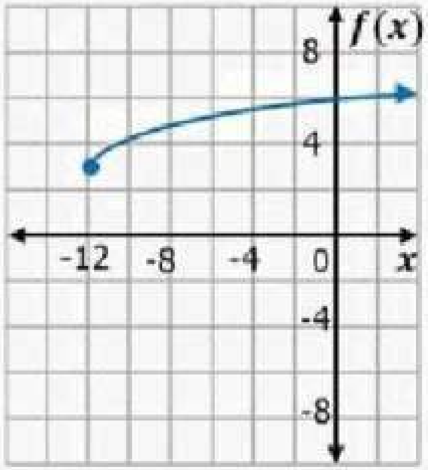
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq -10\}$

تدرب وحل المسائل :–

مثال 2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

$f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x+12} + 3$ (20



المجال = $\{x \mid x \geq -12\}$

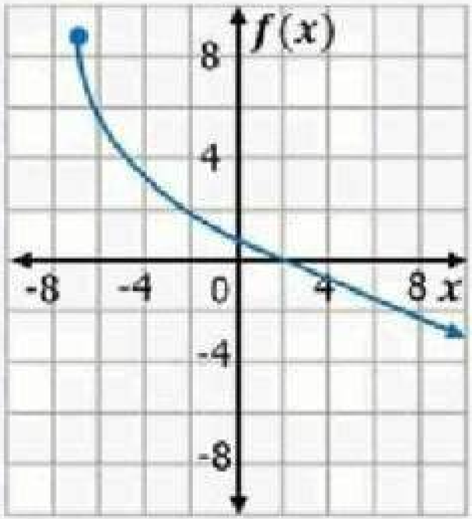
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \geq 3\}$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانياً، وحدد مجالها ومداها:

$f(x) = -3\sqrt{x+7} + 9$ (21



المجال = $\{x \mid x \geq -7\}$

المدى = $\{f(x) \mid f(x) \leq 9\}$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

22) القفز بالمظلات: إذا كان الزمن التقريبي t بالثواني، اللازم لسقوط جسم من ارتفاع d بالأقدام يعطى بالعلاقة $t = \sqrt{\frac{d}{16}}$. فإذا قفز مظلي قبل 11 ثانية من فتح المظلة، فكم قدماً هبط المظلي خلال هذا الزمن؟

$$t = \sqrt{\frac{d}{16}}$$

$$11 = \sqrt{\frac{d}{16}}$$

$$121 = \frac{d}{16}$$

$$d = 1936ft$$

تـدرب وحـل المسـائل :-

مثـال 3

23) العربة الدوارة: إذا كانت سرعة العربة الدوّارة في مدينة الألعاب أثناء نزولها من أعلى قمة تعطي بالعلاقة: $V = \sqrt{v^2 + 64h}$، حيث v السرعة الابتدائية بالأقدام لكل ثانية، و h الارتفاع الرأسي بالأقدام. أراد مصمم اللعبة أن تكون سرعة العربة $90ft/s$ عندما تصل أدنى مستوى لها.

a) إذا كانت السرعة الابتدائية للعربة عند القمة هي $10ft/s$، فاكتب معادلة تمثل ذلك الموقف.

$$90 = \sqrt{100 + 64h}$$

b) حتى يتحقق ما يريده المصمم كم يجب أن يكون ارتفاع القمة، إذا كانت سرعة العربية الابتدائية عند القمة $10ft/s$؟

$$90 = \sqrt{100 + 64h}$$

$$8100 = 100 + 64h$$

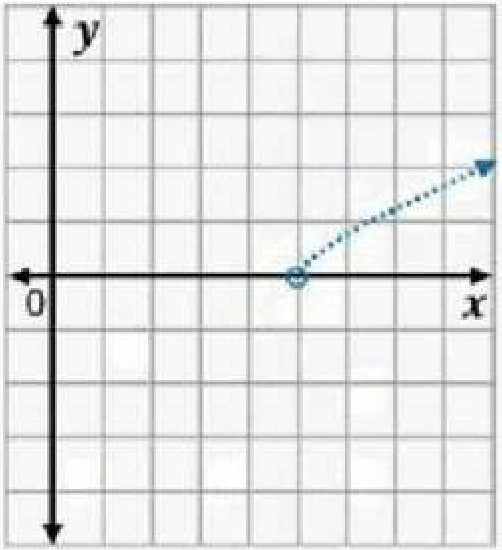
$$h = 125ft$$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 4

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

24) $y < \sqrt{x-5}$

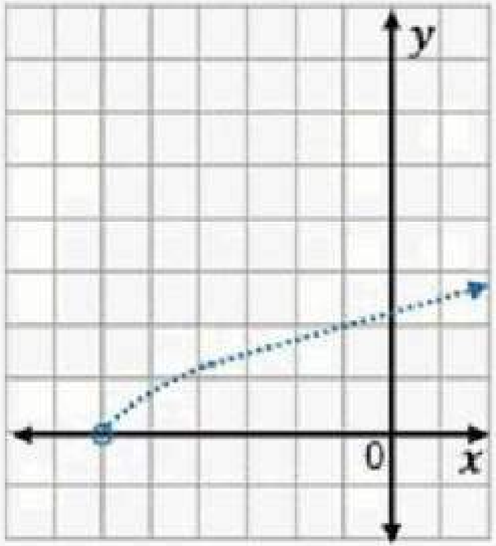


تدرب وحل المسائل :-

مثال 4

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

$y > \sqrt{x+6}$ (25

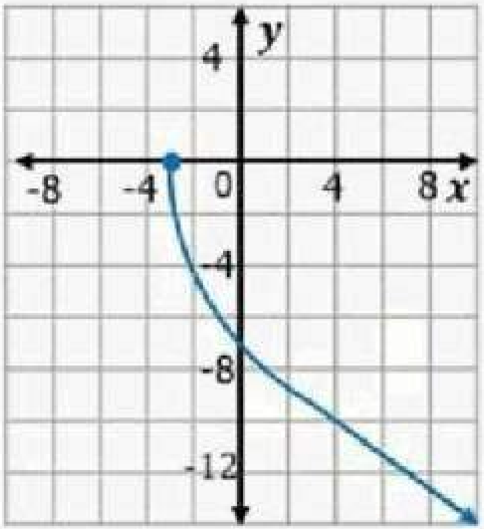


تـدرب وحـل المسائل :-

مثال 4

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

26) $y \geq -4\sqrt{x+3}$

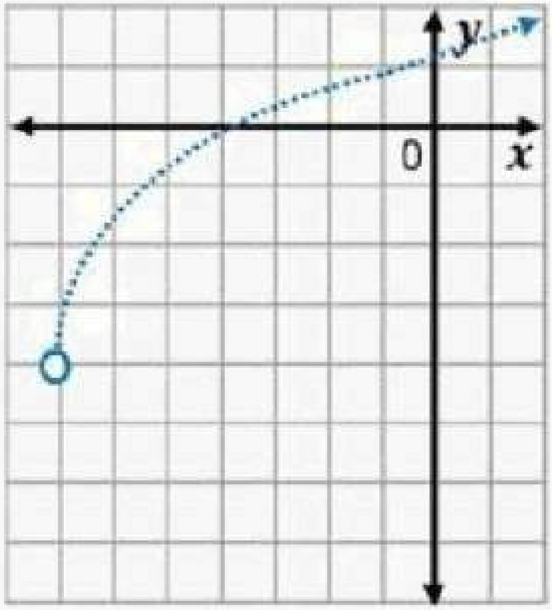


تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 4

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

$y > 2\sqrt{x+7} - 5$ (27

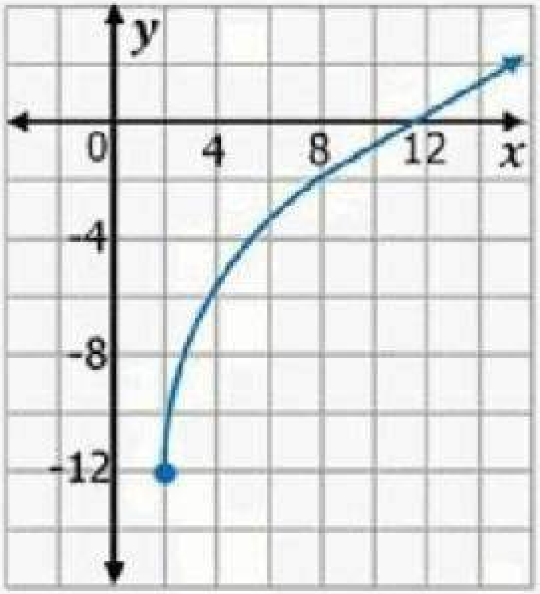


تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 4

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

28) $y \geq 4\sqrt{x-2} - 12$

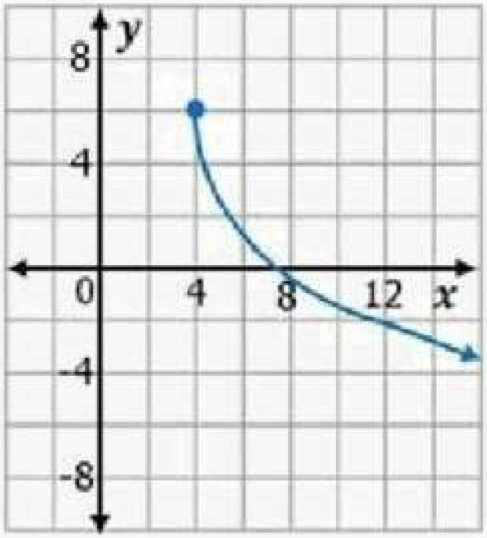


تدرب وحل المسائل :–

مثال 4

مثّل كل متباينة مما يأتي بيانياً:

29) $y \le 6 - 3\sqrt{x-4}$





تـدرب وحـل المسائل :-

30) قيادة: تستطيع إدارة المرور بعد كل حادث سير، تحديد سرعة السيارة قبل ضغط السائق على الكوابح (الفرامل) وذلك باستعماله المعادلة: $v = \sqrt{30fd}$، حيث v تمثل السرعة بالأميال لكل ساعة، f معامل الاحتكاك، d طول أثر احتكاك العجلات بالأقدام. بما أن معامل الاحتكاك يعتمد على حالة الطريق، افرض أن $f = 0.6$.

a) أوجد سرعة سيارة طول أثر الاحتكاك عجلاتها بالأرض $25ft$.

$$v = \sqrt{30fd}$$

$$v = \sqrt{30(0.6)(25)}$$

$$v \approx 21.2mi/h$$

b) إذا كانت سيارتك تسير بسرعة $35mil/h$، فكم قدماً تحتاج لتقف وقوفاً تاماً؟

$$35 = \sqrt{30(0.6)d}$$

$$35 = \sqrt{18d}$$

$$d \approx 68ft$$

تدرب وحل المسائل :-

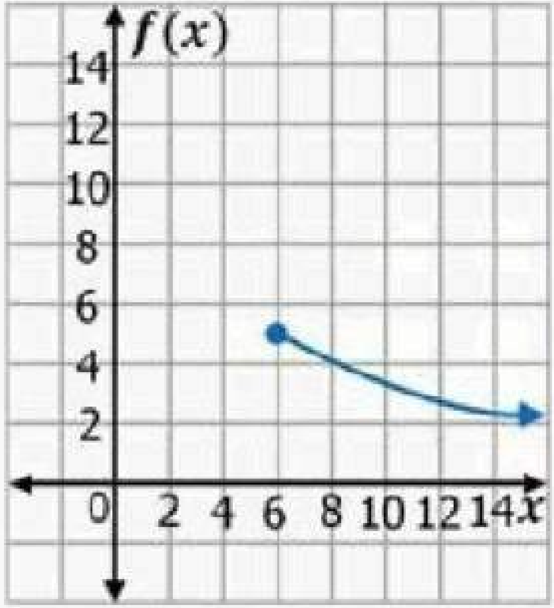
30) قيادة: تستطيع إدارة المرور بعد كل حادث سير، تحديد سرعة السيارة قبل ضغط السائق على الكوابح (الفرامل) وذلك باستعماله المعادلة: $v = \sqrt{30fd}$، حيث v تمثل السرعة بالأميال لكل ساعة، f معامل الاحتكاك، d طول أثر احتكاك العجلات بالأقدام. بما أن معامل الاحتكاك يعتمد على حالة الطريق، افرض أن $f = 0.6$.

c) إذا تضاعفت سرعة سيارة مرة واحدة، فهل يتضاعف طول أثر احتكاك العجلات بالأرض عند الوقوف المفاجئ مرة واحدة ؟ وضح إجابتك.

لا؛ لأن الدالة $v = \sqrt{30fd}$ ليست خطية فطول أثر احتكاك العجلات سيتضاعف أربع مرات.

تدرب وحل المسائل :-

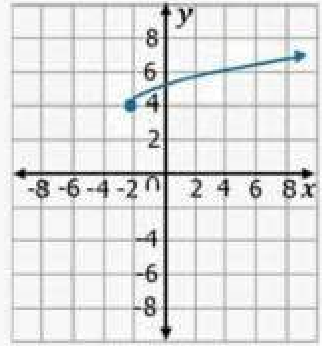
34) عين المجال والمدى للدالة: $f(x) = -\sqrt{x-6} + 5$
ثم مثلها بيانياً.



المجال = $\{x \mid x \geq 6\}$

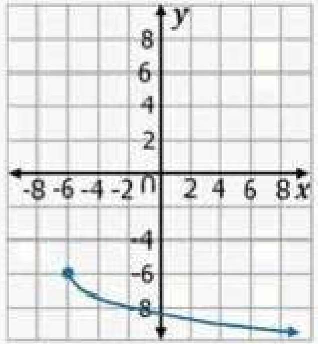
المدى = $\{f(x) \mid f(x) \leq 5\}$

(32



$y = \sqrt{x+2} + 4$

(33



$y = -\sqrt{x+6} - 6$

35) تمثيلات متعددة: في هذا السؤال ستستعمل الدوال الثلاث الآتية لتكتشف التحويلات الهندسية لدوال الجذر التربيعي.

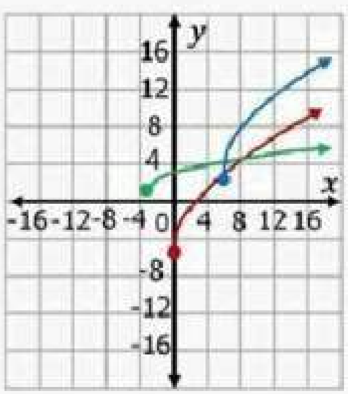
$h(x) = \sqrt{x+3} + 2$

اكتب دالة الجذر التربيعي لكل تمثيل بياني مما يأتي:

$g(x) = \sqrt{16x+1} - 6$

$f(x) = 4\sqrt{x-6} + 3$

a) بيانياً: مثل بيانياً جميع الدوال السابقة على المستوى الإحداثي .

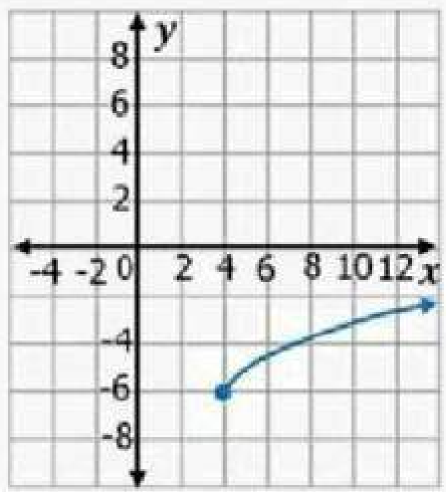


تدرب وحل المسائل :-

مثال 4

اكتب دالة الجذر التربيعي لكل تمثيل بياني مما يأتي:

(31



$$y = \sqrt{x-4} - 6$$

b) **تحليلياً:** ما الانسحاب الذي أجريته على التمثيل البياني للدالة الرئيسية (الأم) لتمثيل بيانياً كلاً من الدوال السابقة؟

$f(x)$: 6 وحدات لليمين ؛ 3 وحدات إلى الأعلى

$g(x)$: $\frac{1}{16}$ وحدة إلى اليسار، 6وحدات إلى الأسفل.

$h(x)$: 3 وحدات لليسار، وحدتين إلى الأعلى.

c) **تحليلياً:** ما الدوال التي أظهر تمثيلها البياني اتساعاً أو ضيقاً رأسياً في التمثيل البياني للدالة الرئيسية ؟ فسر إجابتك.

$f(x)$, $g(x)$

أظهر التمثيل البياني للدالتين اتساعاً رأسياً في التمثيل البياني للدالة الأم؛ لأن مقدار تزايد الدالتين أكبر من مقدار تزايد الدالة الأم

d) **لفظياً:** يبدو أن الدالتين المتسعتين رأسياً اتسعتا بالمقدار نفسه. فكيف يكون ذلك ممكناً؟

لأن $\sqrt{16} = 4$

معدل تغير دوال الجذور التربيعية من الشكل $a\sqrt{x-6}+c$

حيث $a > 0$ يتناقص مع زيادة قيم x.

e) **جدولياً:** أعمل جدولا لمعدلات التغير في الدوال الثلاث بين 8 و 12 وقارنها بمعدلات التغير بين 12 و 16 ،وبناء على ذلك ما التعميم الذي يمكنك التوصيل إليه فيما يخص معدل تغير دوال الجذر التربيعي ؟

معدل تغير دوال الجذور التربيعية من الشكل $a\sqrt{x-6}+c$

حيث $a > 0$ يتناقص مع زيادة قيم x.

$x = 8$	$x = 12$	$x = 16$	معدل التغيربن 12,16	معدل التغيربن 8,12
$f(8)$= 8.66	$f(12)$= 12.798	$f(16)$= 15.65	1.0345	0.713
$g(8)$= 3.36	$g(12)$= 7.89	$g(16)$= 10.03	0.6325	0.535
$h(8)$= 5.317	$h(12)$= 5.873	$h(16)$= 6.369	0.139	0.1215

الفهرس

الفصل الرابع

٤-٤ الجذر النوني nth Root



فيما سبق

درست دوال الجذر التربيعي.

والآن

- أبسط عبارات جذرية.
- أستعمل الحاسبة لتقريب قيم الجذور.

المفردات

الجذر النوني
nth root

رمز الجذر
radical sign

الدليل
index

ما تحت الجذر
radicand

الجذر الرئيس
principal root

لماذا؟

لوحظ تزايد عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات على الطريق كلما زاد عدد الدراجات. ويمكن تمثيل العلاقة بينهما بالدالة $c = \sqrt[5]{b^2}$، حيث b عدد الدراجات، c عدد الحوادث.

تبسيط الجذور: يعدّ إيجاد الجذر التربيعي لعددٍ عمليةً عكسية لتربيعه. فلإيجاد الجذر التربيعي للعدد a، يجب أن تجد العدد الذي مربعه يساوي a. وبالمثل فإن العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد **الجذر النوني** للعدد.

القوى	العوامل	التعبير اللفظي	الجذور
$x^3 = 64$	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$	4 هو الجذر التكعيبي للعدد 64	$\sqrt[3]{64} = 4$
$x^4 = 625$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$	5 هو الجذر الرابع للعدد 625	$\sqrt[4]{625} = 5$
$x^5 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	2 هو الجذر الخامس للعدد 32	$\sqrt[5]{32} = 2$
$a^n = b$	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ مرة}} = b$	a هو الجذر النوني للعدد b	$\sqrt[n]{b} = a$



الفصل الرابع

٤-٤ الجذر النوني nth Root

يقترح هذا النموذج التعريف الآتي للجذر النوني:

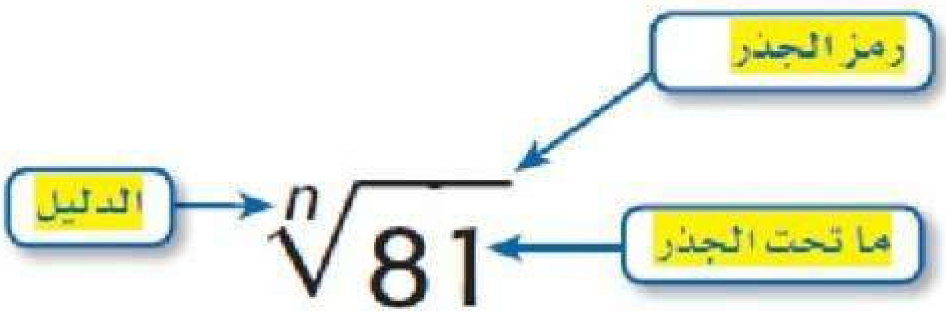
مفهوم أساسي — تعريف الجذر النوني

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيِّ عددين حقيقيين a, b ، ولأيِّ عدد صحيح n ، $n > 1$ إذا كان $a^n = b$ ، فإن a هو جذر نوني للعدد b.

مثال: بما أن $81 = (-3)^4$ ، فإن -3 هو جذر رابع للعدد 81 .

يشير الرمز $\sqrt[n]{}$ إلى الجذر النوني.





الفصل الرابع

٤-٤ الجذر النوني nth Root

بعض الأعداد لها أكثر من جذر نوني حقيقي . فعلى سبيل المثال، العدد 64 له جذران تربيعيان هما: 8 و 8–؛ لأن 8^2 و $(-8)^2$ كليهما يساوي 64. فعندما يكون هناك أكثر من جذر حقيقي، ويكون n عددًا زوجيًا، فإن الجذر غير السالب يسمى **الجذر الرئيس**.

وفيما يأتي بعض الأمثلة على الجذر النوني:

$\sqrt{25} = 5$ ، $\sqrt{25}$ يشير إلى الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$-\sqrt{25} = -5$ ، $-\sqrt{25}$ يشير إلى معكوس (النظير الجمعي) الجذر التربيعي الرئيس للعدد 25.

$\pm\sqrt{25} = \pm 5$ ، $\pm\sqrt{25}$ يشير إلى كلا الجذرين التربيعيين للعدد 25.

مفهوم أساسي — الجذر النوني الحقيقي

أضف إلى مطويتك

ليكن n عددًا صحيحًا أكبر من 1، و a عددًا حقيقيًا.

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وجذر حقيقي سالب وحيد: $\pm\sqrt[n]{a}$، الجذر الموجب هو الجذر الرئيس	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب: $\sqrt[n]{a}$.
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقية.	ليس هناك جذور حقيقية موجبة. وهناك فقط جذر حقيقي سالب وحيد: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك فقط جذر حقيقي: $\sqrt[n]{0} = 0$	



الفصل الرابع

٤-٤ الجذر النوني nth Root

مثال 1 إيجاد الجذور

بسِّط كلًّا ممّا يأتي:

a) $\pm\sqrt{16y^4}$

$$\pm\sqrt{16y^4} = \pm\sqrt{(4y^2)^2}$$
$$= \pm 4y^2$$

الجذران التربيعيان لـ $16y^4$ هما $\pm 4y^2$.

b) $-\sqrt{(x^2-6)^8}$

$$-\sqrt{(x^2-6)^8} = -\sqrt{[(x^2-6)^4]^2}$$
$$= -(x^2-6)^4$$

معكوس الجذر التربيعي الرئيس لـ $(x^2-6)^8$ هو $-(x^2-6)^4$.

c) $\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}}$

$$\sqrt[5]{243a^{20}b^{25}} = \sqrt[5]{(3a^4b^5)^5}$$
$$= 3a^4b^5$$

الجذر الخامس لـ $243a^{20}b^{25}$ هو $3a^4b^5$.

d) $\sqrt[7]{128}$

$$\sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$$

الجذر السابع لـ 128 هو 2

تحقق من فهمك :-

1) بسط كلاً مما يأتي:

(1A $\sqrt[3]{8x^6}$

(1B $-\sqrt{(y+7)^{16}}$

$$\sqrt[3]{8x^6} = 2x^2$$

$$-\sqrt{(y+7)^{16}} = -(y+7)^8$$

٤-٤ الـجـذر الـنـونـــي nth Root

إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًا وأسّ ما تحت الجذر عددًا زوجيًا، وكان أسّ الناتج عددًا فرديًا، يجب أن تجد القيمة المطلقة للناتج لتتأكد من أن الجواب ليس سالبًا.

مثال 2 التبسيط باستعمال القيمة المطلقة

بسّط كلًّا ممّا يأتي:

a) $\sqrt[4]{y^4}$

$\sqrt[4]{y^4} = |y|$

بما أن y من الممكن أن تكون سالبة فالجذر الرئيس لهذه العبارة يساوي القيمة المطلقة لـ y.

b) $\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}}$

$\sqrt[6]{64(x^2-3)^{18}} = 2\left|(x^2-3)^3\right|$

بما أن دليل الجذر (العدد 6) عدد زوجي، وأس العبارة $x^2 - 3$ (العدد 3) عدد فردي فيجب استعمال رمز القيمة المطلقة.

إرشادات للدراسة

دليل الجذر

إذا كان n عددًا فرديًا فهناك فقط جذر حقيقي واحد، وبناءً على ذلك، فلا يوجد هناك جذر رئيس، ولا يوجد حاجة إلى استعمال رمز القيمة المطلقة. أما إذا كان n عددًا زوجيًا فإن $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

تحقق من فهمك :-

1) بسط كلاً مما يأتي:

$\sqrt[4]{16(x-3)^{12}}$ (b

$\sqrt{36y^6}$ (2A

$\sqrt[4]{16(x-3)^{12}} = 2\left|(x-3)^3\right|$

$\sqrt{36y^6} = 6\left|y^3\right|$

مثال 3 من واقع الحياة

تقريب الجذور

حوادث الدراجات: ارجع إلى الفقرة الواردة في بداية الدرس.

a) إذا كانت $c = \sqrt[5]{b^2}$ تمثل عدد الحوادث، و b تمثل عدد الدراجات الهوائية، فقدّر عدد الحوادث الشهرية على طريقٍ ما، إذا عُلم أن 1000 دراجة تمرُّ خلاله كل شهر.

افهم: **المعطيات:** • $c = \sqrt[5]{b}$ توضح العلاقة بين عدد الدراجات الهوائية (b) التي تمر في طريق، وعدد الحوادث (c). بينها وبين السيارات

• عدد الدراجات الهوائية التي تمر خلال الطريق كلَّ شهر هو 1000 دراجة.

المطلوب: تقدير عدد الحوادث بين الدراجات الهوائية والسيارات في هذا الطريق خلال شهر.

خطّط: عوض عن b (عدد الدراجات الهوائية) بالعدد 1000.

حل:

$c = \sqrt[5]{b^2}$	المعادلة الأصلية
$= \sqrt[5]{1000^2}$	$b = 1000$
≈ 15.85	باستعمال الحاسبة

فهناك 16 حادثًا تقريبًا كل شهر على ذلك الطريق.

تحقق

$15.85 \stackrel{?}{=} \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 15.85$

$15.85^5 \stackrel{?}{=} b^2$ — ارفع الطرفين للأس 5

$1000337 \stackrel{?}{=} b^2$ — بسّط

$1000 \approx b$ ✓ — خُذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

b) إذا كان عدد الحوادث المسجلة على طريقٍ ما في أحد الأشهر يساوي 21 حادثًا، فقدر عدد الدراجات الهوائية التي مرَّت في الطريق خلال ذلك الشهر.

$c = \sqrt[5]{b^2}$ — المعادلة الأصلية

$21 = \sqrt[5]{b^2}$ — $c = 21$

$21^5 = b^2$ — ارفع الطرفين للأس 5

$4084101 = b^2$ — بسّط

$2021 \approx b$ — خُذ الجذر التربيعي للطرفين، مع إهمال الجذر السالب

إذن عدد الدراجات الهوائية التي مرَّت في الطريق خلال ذلك الشهر هو 2021 دراجةً تقريبًا.

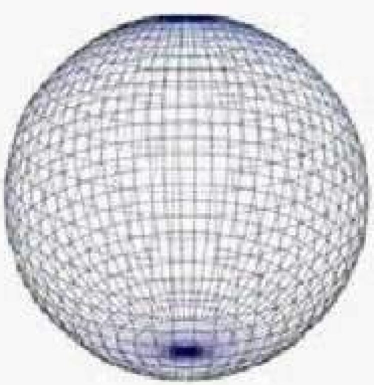
تحقق من فهمك :-

3A) يمكن إيجاد مساحة سطح كرة إذا علم حجمها ، باستعمال القانون $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$ ، حيث V تمثل حجم الكرة , أوجد مساحة سطح كرة حجمها $200 in^3$

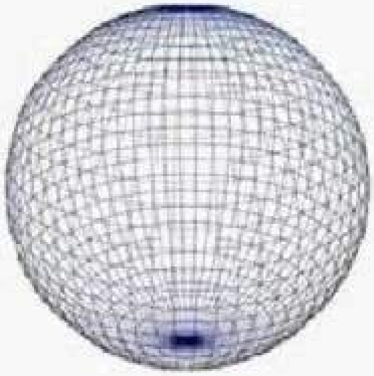
$$S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$$

$$S = \sqrt[3]{36\pi (200)^2}$$

$$\approx 165 \text{ in}^2$$



تحقق من فهمك :-



3B) إذا كانت مساحة سطح كرة تساوي $214.5in^2$، فأوجد حجم الكرة.

$$S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$$

$$214.5 = \sqrt[3]{36\pi V^2}$$

$$(214.5)^3 = 36\pi V^2$$

$$V = \sqrt{\frac{(214.5)^3}{36\pi}}$$

$$\approx 295.4in^3$$

تــأكـد :-

مثـال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

1) $\pm\sqrt{100y^8}$

$$\pm\sqrt{100y^8} = \pm 10y^4$$

2) $-\sqrt{49u^8v^{12}}$

$$-\sqrt{49u^8v^{12}} = -7u^4v^6$$

تــأكـد :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

$\sqrt{(y-6)^8}$ (3

$$\sqrt{(y-6)^8} = (y-6)^4$$

$\sqrt[4]{16g^{16}h^{24}}$ (4

$$\sqrt[4]{16g^{16}h^{24}} = 2g^4\,h^6$$

تــأكـد :-

مثــال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

5) $\sqrt[3]{-125}$

$$\sqrt[3]{-125} = -5$$

6) $\sqrt[6]{64(2y+1)^{18}}$

$$\sqrt[6]{64(2y+1)^{18}} = 2|\,(2y+1)^3\,|$$

تــأكـد :-

مثال 3

7 قمر اصطناعي: إذا كان نصف قطر r لمدار قمر اصطناعي تلفزيوني يعطى بالصيغة $\sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}$ ؛ حيث G تمثل ثابت الجذب الكوني ، M كتلة الأرض ، t الزمن اللازم لإكمال القمر الاصطناعي دورة واحدة حول الأرض . فأوجد نصف قطر مدار القمر الاصطناعي إذا كانت:

$$t = 2.6\times10^6\ s$$
$$M = 5.98 \times 10^{24}\ kg$$
$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$$

$4.088 \times 10^8\ m$ تقريباً.

تــأكـد :-

مثال 3

استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

7) $\sqrt{58}$

$\sqrt{58} \approx 7.616$

8) $-\sqrt{76}$

$-\sqrt{76} \approx -8.718$

9) $\sqrt[5]{-43}$

$\sqrt[5]{-43} \approx -2.122$

10) $\sqrt[4]{71}$

$\sqrt[4]{71} \approx 2.903$



تـدرب وحـل المسائل :–

مثـال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

12) $\pm\sqrt{255a^{16}b^{36}}$

$$\pm\sqrt{255a^{16}b^{36}} = \pm 15a^{8}\,b^{16}$$

13) $-\sqrt{400x^{32}y^{40}}$

$$-\sqrt{400x^{32}y^{40}} = -20x^{16}\,y^{20}$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

$\sqrt{(a^2+4a)^{12}}$ (14

$$\sqrt{(a^2+4a)^{12}} = (a^2+4a)^6$$

$\sqrt[3]{27b^{18}c^{12}}$ (15

$$\sqrt[3]{27b^{18}c^{12}} = 3b^6\,c^4$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

$\sqrt[5]{-243}$ (16

$$\sqrt[5]{-243} = -3$$

$\sqrt[3]{-(y-9)^9}$ (17

$$\sqrt[3]{-(y-9)^9} = -(y-9)^3$$

تـدرب وحـل المسائل :–

مـثـال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

18) $\sqrt[6]{x^{18}}$

$$\sqrt[6]{x^{18}} = |x^3|$$

19) $\sqrt[3]{a^{12}}$

$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$$

20) $\sqrt[4]{81(x+4)^4}$

$$\sqrt[4]{81(x+4)^4} = 3|(x+4)|$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

21) $\sqrt[3]{(y^3+5)^{18}}$

$$\sqrt[3]{(y^3+5)^{18}} = (y^3+5)^6$$

22) $\sqrt[8]{x^{16}y^8}$

$$\sqrt[8]{x^{16}y^8} = x^2|y|$$

23) $\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}}$

$$\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}} = 2a^3\ b^2$$

تدرب وحل المسائل :-

24) شحن: يريد متجر لبيع الكتب عبر الإنترنت زيادة حجم الصناديق المستعملة في الشحن. إذا كان حجم الصندوق الجديد N يساوي حجم الصندوق القديم V مضروباً في مكعب عدد ثابت F؛ أي أن $N = V \cdot F^3$. فما قيمة العدد F إذا كان الحجم الأصلي للصندوق يساوي $0.8ft^3$ والحجم الجديد يساوي $21.6ft^3$؟

$$N = V \cdot F^3$$

$$F^3 = \frac{N}{V}$$

$$F = \sqrt[3]{\frac{N}{V}}$$

$$F = \sqrt[3]{\frac{21.6}{0.8}}$$

$$= 3$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

بسط كلاً مما يأتي:

25) هندسة: يمكن إيجاد طول ضلع مكعب r باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{V}$ حيث V تمثل حجم المكعب بالوحدات المكعبة. جد طول ضلع مكعب حجمه $512cm$.

$$r = \sqrt[3]{V}$$

$$r = \sqrt[3]{512}$$

$$r = 8\ cm$$



تـدرب وحـل المسائل :-

استعمل الحاسبة لتقريب قيمة كل مما يأتي، إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

$-\sqrt{150}$ (26

$-\sqrt{150} \approx -12.247$

$\sqrt{0.43}$ (27

$\sqrt{0.43} \approx 0.656$

$\sqrt[5]{-4382}$ (28

$\sqrt[5]{-4382} \approx -5.350$

$\sqrt[6]{(8912)^2}$ (29

$\sqrt[6]{(8912)^2} \approx 20.733$



تـدرب وحـل المسائل :-

30) هندسة: يمكن إيجاد نصف القطر r لكرة حجمها V باستعمال القانون $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

a) أوجد نصف قطر كل من الكرت ذات الأحجام الآتية: $64000cm^3$ ، $8000cm^3$ ، $1000cm^3$.

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3(64000)}{4\pi}}$$

بالمثل؛ 12.4 , 6.2

$$\approx 24.8\ mc$$

b) ما مقدار التغير في حجم الكرة عند زيادة نصف القطر إلى مثليه؟

عند زيادة نصف القطر إلى مثليه يزداد الحجم إلى (2^3) أي ثمانية أمثال.

تدرب وحل المسائل :-

بسط كلا مما يأتي:

31) $\sqrt{196c^6d^4}$

$\sqrt{196c^6d^4} = 14|c^3|d^2$

32) $\sqrt[3]{-27a^{15}b^9}$

$\sqrt[3]{-27a^{15}b^9} = -3a^5\,b^3$

33) $\sqrt[4]{-16x^{16}y^8}$

$\sqrt[4]{-16x^{16}y^8} = \pm 2ix^4\,y^2$

34) $\sqrt[3]{64(x+y)^6}$

$\sqrt[3]{64(x+y)^6} = 4(x+y)^2$

تـدرب وحـل المسائل :-

35) فيزياء: طور جو هانز كيبلر الصيغة $d = \sqrt[3]{6t^2}$ حيث d تمثل المسافة بملايين الأميال بين أي كوكب والشمس و t تمثل عدد الأيام الأرضية التي يستغرقها الكوكب ليدور حول الشمس. إذا كانت سنة كوكب المريخ تساوي 687 يوماً أرضياً. فكم يبعد كوكب المريخ عن الشمس؟

$$d = \sqrt[3]{6t^2}$$

$$d = \sqrt[3]{6(687)^2}$$

$d \approx$ 141 مليون ميل

تدرب وحل المسائل :-

36) أحياء: يبين قانون كليبر (kleiber) $p = 73.3\sqrt[4]{m^3}$ العلاقة بين كتلة كائن حي بالكيلوجرام m ومتوسط الأيض اليومي له بالسعرات الحرارية p. أوجد متوسط الأيض اليومي لكل من الحيوانات في الجدول أدناه.

الحيوان	كتلته (kg)
النسر	4.5
الكلب	30
التمساح	72
الدولفين	156
الفيل	2300

النسر : $p = 73.3\sqrt[4]{m^3}$

$= 73.3\sqrt[4]{(4.5)^3}$

$\approx 226.5Cal$

لكل يوم.

الكلب : $939.6Cal$ تقريباً لكل يوم،

التمساح : $1811.8Cal$ تقريباً لكل يوم ،

الدولفين: $3235.5Cal$ تقريباً لكل يوم ،

الفيل : $24344.4Cal$ تقريباً لكل يوم

الفهرس